C- Transformées de Fourier (1D)

$$\tilde f(\nu) = \int f(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$

Ex: $TF\left(e^{-\pi\alpha x^2}\right) = \int e^{-\pi\alpha x^2} e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \int e^{-\pi\alpha\left(x^2 + \frac{2i\nu x}{\alpha}\right)} dx$

$$= \int e^{-\pi\alpha\left(x+\frac{i\nu}{\alpha}\right)^2} e^{-\frac{\pi\nu^2}{\alpha}}\, dx$$

$$= e^{-\frac{\pi\nu^2}{\alpha}} \underbrace{\int e^{-\alpha\pi\left(x+i\nu/\alpha\right)^2} dx}_{=\int e^{-\alpha\pi x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$$

(⚠ Outils plan $\mathbb{C}$, f^n holomorphe...)

On a la propriété suivante (pour les fonctions)

$$\int \tilde f \varphi = \int \int f(x')\, e^{-2i\pi x' x}\, dx' \cdot \varphi(x)\, dx = \int f(x')\, \tilde\varphi(x')\, dx'$$

$$= \int f \cdot \tilde\varphi$$

Donc si $\lim_{n\to+\infty} f_n = \alpha$, $\lim_{+\infty} \int \tilde f_n \varphi = \lim_{+\infty} \int f_n \cdot \tilde\varphi = \int \alpha \tilde\varphi$

On définit $\tilde\alpha$, TF de la distribution α par

$$\forall \varphi \qquad \int \tilde\alpha \varphi = \int \alpha \tilde\varphi$$

PROPRIÉTÉS:

1. $\tilde\delta = 1$

car $\int \tilde\delta \varphi = \int \delta \tilde\varphi = \tilde\varphi(0) = \left.\int \varphi(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx\right|_{\nu=0} = \int \varphi$

on a donc le droit d'écrire que

$$\int \delta(x)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx = 1,$$ même si $e^{-2i\pi\nu x}$ n'est pas f^n test...

2. $\tilde 1 = ?$

$1 = \lim_{\sigma\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \tilde 1 = \lim_{\sigma\to+\infty} TF\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right) = \lim \sqrt{2\pi\sigma^2}\, e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$

(au sens des distrib°) $= \delta(\nu)$ (gaussienne normée)

D'où $\tilde 1 = \delta(\nu)$, ce qui s'écrit (si on remplace 1 dans la TF)

$$\int e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \delta(\nu) \quad !$$

Ou alors: $\int \tilde 1 \varphi = \int \tilde\varphi = \varphi(0)$ car $\varphi(0) = \int \tilde\varphi\, e^{2i\pi\nu.0} d\nu = \int \tilde\varphi$ d'où $\tilde 1 = \delta$, plus simplement.

3. TF inverse

$$\int \tilde{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu = \int \left(\int f(x') e^{-2i\pi\nu x'} dx' \right) e^{+2i\pi\nu x} d\nu$$

$$= \int f(x') \underbrace{\int e^{2i\pi\nu(x-x')} d\nu}_{\delta(x'-x)} . dx'$$

$$= f * \delta = f(x)$$

4. Parseval-Plancherel

$$\int fg^* = \iiint \tilde{f}(\nu) \tilde{g}(\nu')^* e^{-2i\pi\nu x} e^{+2i\pi\nu' x} d\nu d\nu' dx$$

$$= \int \tilde{f}(\nu) \tilde{g}(\nu')^* \int e^{-2i\pi(\nu-\nu')x} dx \, d\nu d\nu'$$

$$= \int \tilde{f}(\nu) \tilde{g}(\nu')^* \delta(\nu-\nu') d\nu d\nu'$$

$$= \int \tilde{f} \tilde{g}^*$$

Interprétation :

On peut faire un parallèle avec ce qu'on sait des espaces vectoriels de dimension finie et dire que les 4 premières propriétés n'expriment que le fait que

|| $\{e^{2i\pi\nu t}\}$ peut être vue comme une base de l'espace des fonctions, orthonormée pour le produit scalaire $\int fg^* = \langle f,g \rangle$

$\langle e_{\nu'}, e_\nu \rangle = \int e^{2i\pi(\nu'-\nu)x} dx = \delta(\nu-\nu')$	$\vec{e_i} . \vec{e_j} = \delta_{ij}$
$\langle f, e_\nu \rangle = \int f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \tilde{f}(\nu)$	$x_i = \vec{x} . \vec{e_i}$
$f(x) = \int \langle f, e_\nu \rangle e^{+2i\pi\nu x} dx = \int \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} dx$	$x = \sum x_i \vec{e_i}$
$\int fg^* = \int \tilde{f} \tilde{g}^*$	$\vec{x} . \vec{y} = \sum_i x_i . y_i$

5. $\underline{TF(f*g) = \tilde{f}\cdot\tilde{g}}$

$$\int f*g\, e^{-2i\pi\nu x}\,dx = \int f(x')\,g(x-x')\,e^{-2i\pi\nu(x-x'+x')}\,dx\,dx'$$
$$= \int f(x')\,\underbrace{\int g(x-x')\,e^{-2i\pi\nu(x-x')}\,dx}_{\tilde{g}(\nu)}\;e^{-2i\pi\nu x'}\,dx'$$
$$= \tilde{g}(\nu)\,\tilde{f}(\nu)$$

6. $TF(f\cdot g) = \tilde{f}*\tilde{g}$

$$\int f(x)\,g(x)\,e^{-2i\pi\nu x}\,dx = \int\int \tilde{f}(\nu')\,e^{+2i\pi\nu' x}\,d\nu' \int \tilde{g}(\nu'')\,e^{2i\pi\nu'' x}\,d\nu''\,e^{-2i\pi\nu x}\,dx$$
$$= \int \tilde{f}(\nu')\,\tilde{g}(\nu'')\,\underbrace{\int e^{2i\pi x(\nu'+\nu''-\nu)}\,dx}_{\delta(\nu'+\nu''-\nu)}\;d\nu'\,d\nu''$$
$$= \int \tilde{f}(\nu')\,\tilde{g}(\nu-\nu')\,d\nu'$$

7. <u>Parité.</u>

▷ Si $f(x) = f(-x) \xrightarrow{TF}$
$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,e^{-2i\pi\nu x}\,dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x')\,e^{2i\pi\nu x'}\,(-dx') \quad (x' = -x)$$
$$= \int f(x')\,e^{2i\pi\nu x'}\,dx' = \tilde{f}(-\nu)$$

<u>f paire $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ paire</u>

▷ Si $f(x) = -f(-x)$, comme $\widetilde{f(-x)}(\nu) = \tilde{f}(-\nu)$

f impaire $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ impaire

8. $$TF(TF(f)) = \int e^{-2i\pi\nu x}\,\tilde{f}(\nu)\,d\nu = \int e^{-2i\pi\nu x}\,e^{-2i\pi\nu x'}\,f(x')\,d\nu\,dx'$$
$$= \int f(x') \int e^{-2i\pi\nu(x+x')}\,d\nu\,dx' = \int f(x')\,\delta(x+x')\,dx'$$

$$\boxed{TF(TF(f)) = f(-x)}$$

<u>Csq</u> = Si f est paire $TF(\tilde{f}) = TF^{-1}(\tilde{f})$

9. <u>Symétrie hermitienne</u>

$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = f(x)^* \xrightarrow{TF}$ $$\tilde{f}(\nu) = \int f(x)^*\,e^{-2i\pi\nu x}\,dx = \left(\int f\,e^{+2i\pi\nu x}\,dx\right)^*$$
$$= \tilde{f}(-\nu)^*$$

D'où $\tilde{f}(-\nu) = \tilde{f}(\nu)^*$

(et donc $|\tilde{f}(-\nu)| = |\tilde{f}(\nu)|$)

10. <u>Translation</u>

$$TF(f(x-x_0)) = TF(f * \delta(x-x_0)) = \tilde{f}(\nu) \cdot \int \delta(x-x_0)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$
$$= \tilde{f}(\nu)\, e^{-2i\pi\nu x_0}$$

On peut aussi procéder par un simple changement de variables, mais il est intéressant de souligner que la translation peut être vue comme une convolution!

11. <u>Dilatation</u>

$$TF(f(ax)) = \int f(ax)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \int f(x)\, e^{-2i\pi \frac{\nu}{a} x}\, \frac{dx}{a} \text{ si } a>0$$
$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu/a\, x}\, \frac{dx}{a} \text{ si } a<0$$
$$= \int f(x) e^{-2i\pi \frac{\nu}{a} x}\, \frac{dx}{|a|} \quad \forall a.$$
$$= \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

ou bien $TF\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right) = |a|\, \tilde{f}(a\nu)$

$f(x/a)$ est la dilatée de f d'un facteur a. Quand on dilate une fonction elle se décompose forcément sur des fréquences plus basses: sa TF se contracte.

12. <u>Dérivation</u>

$$TF(f') = \int f' e^{-2i\pi\nu x}\, dx = -\int f(x)\,(-2i\pi\nu)\, e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$
$$= 2i\pi\nu\, \tilde{f}(\nu)$$

$$\widetilde{f^{(n)}}(\nu) = (2i\pi\nu)^n\, \tilde{f}(\nu)$$

Ce qu'on peut aussi voir comme une convolution!

$f' = f * \delta'$ et $TF(\delta') = 2i\pi\nu$

13. $TF^{-1}(\delta') = \int \delta(\nu) e^{+2i\pi\nu x} d\nu = -2i\pi x \int \delta(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu$

$$= -2i\pi x$$

$$TF(x) = \frac{\delta'(\nu)}{-2i\pi}$$

$$TF(x^n) = \frac{\delta^{(n)}(\nu)}{(-2i\pi)^n}$$

14. $TF(H') = 2i\pi\nu \tilde{H} = 1$

$\Rightarrow \tilde{H} = \frac{1}{2i\pi\nu}$ mais ⚠ $\frac{1}{\nu}$ est une distribution qu'on note $vp.\frac{1}{\nu}$. Elle est définie par

$$\langle vp\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Et aussi, $\frac{1}{2i\pi\nu} + \alpha.\delta(\nu)$ vérifie $2i\pi\nu \tilde{H} = 1$

$\Rightarrow H - \frac{1}{2}$ est réelle et impaire $\Rightarrow$ il faut que $\tilde{H} - \frac{1}{2}\delta(\nu)$ aussi ~~soit~~ impaire

ie $\frac{1}{2i\pi(-\nu)} + \alpha\,\delta(-\nu) - \frac{1}{2}\delta(-\nu) = -\frac{1}{2i\pi\nu} - (\alpha - \frac{1}{2})\delta(\nu)$

ie $2(\alpha - \frac{1}{2})\delta(\nu) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\tilde{H} = \frac{1}{2i\pi\nu} + \frac{1}{2}\delta(\nu)}$$

15. (Admise)

$$Ш(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n)$$

$$\tilde{Ш} = Ш$$

16. <u>Autocorrélation</u>

$$A_f(\tau) = \int f(x) f(x+\tau) dx$$

$$A_f(-\tau) = \int f(x) f(x-\tau) dx = \int_{X = x-\tau} f(X+\tau) f(X) dX = A_f(\tau)$$

$\Rightarrow A_f(\tau) = \int f(x) f(x-\tau) dx = f * f(-x)\ (\tau)$

$\Rightarrow \tilde{A_f} = \tilde{f}(\nu) \cdot \tilde{f}(-\nu) = |\tilde{f}(\nu)|^2$ si $f \in \mathbb{R}$

17. Fonctions périodiques

Si $f(t+T) = f(t)\ \forall t$, alors

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

et donc on peut définir une TF au sens des distributions

$$\tilde{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int e^{in\omega t} e^{-2i\pi\nu t}\, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

$\boxed{CP}$: $\cos(2\pi\nu_0 x) = \frac{1}{2}\left(e^{2i\pi\nu_0 x} + e^{-2i\pi\nu_0 x}\right)$

$$\Rightarrow TF\left(\cos(2\pi\nu_0 x)\right) = \frac{1}{2}\left\{\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)\right\}$$

De même $TF\left(\sin(2\pi\nu_0 x)\right) = \frac{1}{2i}\left\{\delta(\nu-\nu_0) - \delta(\nu+\nu_0)\right\}$

Quelques TF célèbres

$$\widetilde{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2\nu^2}$$

$$\widetilde{e^{-\mu|x|}} = \int_{-\infty}^{0} e^{\mu x} e^{-2i\pi\nu x}\, dx + \int_0^{+\infty} e^{-\mu x} e^{-2i\pi\nu x}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{(\mu-2i\pi\nu)x}}{\mu-2i\pi\nu}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(\mu+2i\pi\nu)x}}{\mu+2i\pi\nu}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\mu-2i\pi\nu} + \frac{1}{\mu+2i\pi\nu} = \frac{2\mu}{\mu^2+4\pi^2\nu^2} \quad \text{(lorentzienne)}$$

$$\widetilde{\Pi(x)} = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\nu x}\, dx = \left[-\frac{1}{2i\pi\nu} e^{-2i\pi\nu x}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2i\pi\nu}\left(e^{i\pi\nu} - e^{-2i\pi\nu}\right)$$

$$= \mathrm{sinc}(\pi\nu) \quad \text{avec } \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}$$

$$\tilde{\Lambda} = \widetilde{\Pi * \Pi} = \tilde{\Pi}^2 = \mathrm{sinc}^2(\pi\nu)$$

Changement de convention

Parfois, on prend $\hat{f}(\omega) = \int f(x)\, e^{-i\omega x} dx$

c'est à dire $\hat{f}(\omega) = \tilde{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Propriétés :

1. $\int e^{-2i\pi\nu x} dx = \delta(\nu) = \delta\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 2\pi . \delta(\omega)$

$\int e^{\pm i\omega x} dx = 2\pi\, \delta(\omega)$

$\hat{1} = 2\pi\, \delta(\omega)$

2. $f(x) = \int \tilde{f}(\nu)\, e^{2i\pi\nu x} d\nu \qquad \omega = 2\pi\nu$

$= \int \tilde{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{i\omega x} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x} dx$

3. $\int f g^* = \int \tilde{f}(\nu)\, \tilde{g}(\nu)^* d\nu \underset{\omega = 2\pi\nu}{=} \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}\, \hat{g}\, d\omega$

Il faut pouvoir changer vite de convention...

4. $\hat{f'} = i\omega \hat{f}$

Autre convention (opticiens) : $\hat{f}(\omega) = \int f(x)\, e^{+i\omega x} dx$

$\Rightarrow$ idem, mais $\widehat{f'} = -i\omega \hat{f}$

D. Transformée de Fourier N dimensions.

$$\tilde{f}(\vec{\nu}) = \int f(\vec{r})\, e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}}\, d\vec{r} \quad \text{et souvent on trouve} \quad \hat{f}(\vec{k}) = \int f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{r}$$

PROPRIÉTÉS

1. $\int e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}}\, d\vec{r} = \delta(\vec{\nu})$

$\Rightarrow \int e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{r} = \delta\left(\frac{\vec{k}}{2\pi}\right) = \prod_i \delta\left(\frac{k_i}{2\pi}\right) = (2\pi)^N \delta(\vec{k})$

où N

2. Séparabilité : si $f(\vec{r}) = \prod_i f_i(r_i)$ (séparable)

$$\tilde{f}(\vec{\nu}) = \int \prod_j f_j(r_j) \cdot \prod_j e^{-2i\pi r_j \nu_j} \prod_j dr_j = \prod_j \tilde{f}_j(\nu_j)$$

f séparable $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}$ séparable (ex : $\delta(\vec{r}) = \prod_j \delta(r_j)$, gaussienne...)

3. TF inverse

$$f(\vec{r}) = \int \tilde{f}(\vec{\nu})\, e^{2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}}\, d\vec{\nu} = \int \tilde{f}\left(\frac{\vec{k}}{2\pi}\right) e^{i\vec{k}.\vec{r}} \prod_j \frac{dk_j}{2\pi} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int \hat{f}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{k}$$

4. Parseval-Plancherel

$$\int f g^* = \int \tilde{f}(\vec{\nu})\, \tilde{g}(\vec{\nu})^*\, d\vec{\nu} = \frac{1}{2\pi^N} \int \hat{f}(\vec{k})\, \hat{g}(\vec{k})^*\, d\vec{k}$$

5. Convolution

$$\widetilde{f * g} = \tilde{f} \cdot \tilde{g} \quad \text{et donc} \quad \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

6. Translation

$$f(\vec{r} - \vec{r}_0) = f * \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\widetilde{f(\vec{r}-\vec{r}_0)}(\vec{\nu}) = \tilde{f}(\vec{\nu}) \cdot e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}_0} \quad \text{car} \int \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}} = e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}_0}$$

7. Dilatation

$(a>0)$ $$\widetilde{f(a\vec{r})} = \int f(a\vec{r})\, e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}}\, d\vec{r} \underset{\vec{r}\,' = a\vec{r}}{=} \int f(\vec{r}\,')\, e^{-2i\pi\frac{\vec{\nu}}{a}.\vec{r}\,'}\, \frac{d\vec{r}\,'}{a^N} = \frac{1}{a^N} \tilde{f}\left(\frac{\vec{\nu}}{a}\right)$$

8. Isotropie

Si $f(\vec{r}) = g(r)$ alors $\exists h$ tq $\tilde{f}(\vec{\nu}) = h(\nu)$

Ex : 2D. Fonction d'Airy

$$f(x,y) = \mathrm{rect}\left(\frac{r}{D}\right) \quad \left(\text{cercle de rayon } \frac{D}{2}\right)$$

$$\tilde{f}(\vec{\nu}) = \int \mathrm{rect}\left(\frac{r}{D}\right) e^{-2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}} d\vec{r}$$

On pose $x = r\cos\theta$ $\quad \nu_x = \nu\cos\varphi$

$y = r\sin\theta$ $\quad \nu_y = \nu\sin\varphi$

$$\tilde{f}(\vec{\nu}) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{r}{D}\right) e^{-2i\pi\nu r(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{+\infty} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \; r.\mathrm{rect}\left(\frac{r}{D}\right) e^{-2i\pi\nu r\cos(\theta-\varphi)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{r}{D}\right) r \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2i\pi\nu r\cos\theta} d\theta$$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\theta} d\theta \qquad x J_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi$$

$$\tilde{f}(\vec{\nu}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{r}{D}\right) 2\pi r J_0(2\pi\nu r) dr \quad (\text{transformée de Bessel})$$

$$= \int_0^{D/2} 2\pi r J_0(2\pi\nu r) dr = \frac{1}{\nu} \times \int_0^{\pi\nu D} \xi J_0(\xi) \frac{d\xi}{2\pi\nu}$$

$$= \frac{1}{2\pi\nu^2} \times \pi\nu D \times J_1(\pi\nu D)$$

$$= \frac{\pi D^2}{4} \times \frac{2J_1(\pi\nu D)}{\pi\nu D}$$

↳ fonction d'Airy $A(\pi\nu D)$

9. Dérivation

$$\partial_x f = \int 2i\pi\nu_x \tilde{f} e^{2i\pi\vec{\nu}.\vec{r}} d\vec{r} \Rightarrow \widetilde{\partial_x f} = 2i\pi\nu_x \tilde{f}$$

$$\widehat{\partial_x f} = ik_x \hat{f}$$

Csq : $\widehat{\vec{\mathrm{grad}}\, f} = i\vec{k}\hat{f}$

$\widehat{\Delta f} = -k^2\hat{f}$

Exemple :

$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = ?$

$\forall r \neq 0 \quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ et $\int_{O_R} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\vec{r} = \int \mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\vec{r} = \int \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \vec{dS}$

$= \int -\frac{1}{R^2} \vec{e_r} \cdot \vec{e_r}\, dS = -4\pi$

$\forall \varphi \quad \int \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \varphi\, d\vec{r}$ ne dépend pas de R

et $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{O_\varepsilon} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \varphi(\vec{r})\, d\vec{r} = \int \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \varphi(0)\, d\vec{r} = -4\pi \varphi(0)$

$\Rightarrow \quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\, \delta(\vec{r})$

Comme

$\widehat{\Delta\left(\frac{1}{r}\right)} = -k^2\, \widehat{\frac{1}{r}} = -4\pi \underbrace{\widehat{\delta(\vec{r})}}_{1} \Rightarrow$ on écrit que $\widehat{\frac{1}{r}} = \frac{1}{k^2}$

- A un champ de laplacien nul près
- Ça donne un sens à la TF^{-1} de $\frac{1}{k^2}$ donc à la TF de $\frac{1}{r^2}$

$TF^{-1}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \times \frac{1}{k}$

SYSTÈMES LINÉAIRES

A- Cas unidimensionnel : Généralités.

Soit un "opérateur" décrivant un système physique

$$s(t) = \mathcal{S}(e(t))$$

$\mathcal{S}$ est linéaire si $\forall \alpha, \beta, e_1, e_2$ $\quad \mathcal{S}(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha \mathcal{S}(e_1) + \beta \mathcal{S}(e_2)$

$\mathcal{S}$ est invariant par translation si

$$\mathcal{S}(e(t+\tau)) = \mathcal{S}(e)(t+\tau)$$

(ie $\mathcal{S}$ commute avec l'opérateur T_τ tq $T_\tau(e(t)) = e(t+\tau)$)

1. Réponse impulsionnelle

$e = e * \delta \Rightarrow \quad e(t) = \int e(t')\, \delta(t-t')\, dt'$

$\mathcal{S}(e(t)) = \int e(t')\, \mathcal{S}(\delta(t-t'))\, dt'$ si $\mathcal{S}$ est linéaire

et si en plus $\mathcal{S}$ est invariant,

$$\mathcal{S}(e(t)) = \int e(t')\, \mathcal{S}(\delta)(t-t')\, dt'$$

$$\boxed{\mathcal{S}(e) = e * \mathcal{S}(\delta)}$$

|| Tout opérateur linéaire et invariant est une convolution par la réponse impulsionnelle $\mathcal{S}(\delta)$.

Ex : Translation :

$T_\tau T_{-x_0} = T_{-x_0} T_\tau$ et T_{x_0} est linéaire

$\Rightarrow$ en effet $T_{x_0} = * \delta(x - x_0)$

Dérivation :

$(f(x+\tau))' = f'(x+\tau)$ et la dérivation est linéaire

$\Rightarrow$ l'opérateur dérivation est la convolut° par δ'

Connaître $\mathcal{S}(\delta)$ permet de tout savoir sur le comportement du système. C'est la fonction de Green du problème, $G(t)$

2. Fonction de transfert

$$\mathcal{S}(e^{i\omega t}) = \int e^{i\omega(t-t')} G(t')\,dt' = e^{i\omega t} \int G(t') e^{-i\omega t'} dt'$$
$$= \hat{G}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

‖ Un système linéaire et invariant conserve la fréquence. La fonction de transfert d'un système est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

Si $s(t) = \mathcal{S}(e(t)) = e * G$

alors $\hat{s} = \hat{G}.\hat{e}$

⇒ En Fourier les choses sont plus simples. (surtout pour l'inversion de la convolution, par exemple retrouver $\hat{e}$ connaissant $\hat{s}$: $\hat{e} = \dfrac{\hat{s}}{\hat{G}}$

3. Réponse à un échelon

$$e = \int e(t')\delta(t-t')\,dt' = -\int e'(t')\left(-H(t-t')\right)dt'$$
$$= e' * H$$

$$\mathcal{S}(e) = \int e'(t')\,\mathcal{S}(H)(t-t')\,dt' = e' * \mathcal{S}(H)$$ si $\mathcal{S}$ est linéaire et invariant.

⇒ comme la famille $\{\delta(t-t_0)\}_{t_0}$ ou $\{e^{2i\pi\nu t}\}_\nu$, la famille $\{H(t-t_0)\}_{t_0}$ peut être vue comme une base de l'espace des f^n^.

Connaître $\mathcal{S}(H)$ c'est connaître la réponse du système à n'importe quelle entrée, comme pour G ou $\hat{G}$.

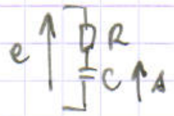
En fait

$$\mathcal{S}(H)' = \mathcal{S}(H') = G$$

‖ La réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse à un échelon.

B. Electrocinétique

Circuit RC :



$s + Ri = e \quad i = C\frac{ds}{dt} \Rightarrow \boxed{s + RC\dot{s} = e}$

$\Rightarrow$ la relation entre s et e est linéaire et invariante.

$\exists\, G(t)$ tq $s = G * e$

▶ Comme il n'est pas évident de trouver G, on passe en Fourier

$(iRC\omega + 1)\hat{s} = \hat{e}$ $\quad$ [convention $\hat{s} = \int s(t) e^{-i\omega t} dt \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$]

$$\hat{s} = \underbrace{\frac{1}{1 + iRC\omega}}_{\hat{G}}\,\hat{e}$$

▶ $G(t) = TF^{-1}(\hat{G}) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega RC} d\omega \Rightarrow$ on passe en plan $\mathbb{C}$.

si $t<0$ or pas de pôle dans le $\frac{1}{2}$ plan inférieur

$\Rightarrow G(t<0) = 0$

si $t>0$ pôle en $\frac{i}{RC}$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \left(\frac{i}{RC}\right)} \times -\frac{i}{RC} = -\frac{i}{2\pi RC} \times 2i\pi \,\underbrace{\mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega - \frac{i}{RC}} ; \frac{i}{RC}\right)}_{e^{-t/RC}}$$

$$\boxed{G(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \cdot H(t)}$$

▶ Vérification : Réponse à un échelon $\quad s + RC\dot{s} = H(t)$

$s(t<0) = 0$ et $s(t>0) = \alpha e^{-t/RC} + 1 \qquad \alpha = -1$ (cond. initiales)

solution sans 2nd membre $\qquad$ solution particulière

$s(t) = 1 - e^{-t/RC} \Rightarrow G(t) = s'(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} H(t)$ $\quad$ ça marche !

C. Electrostatique

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$

$$\boxed{-\Delta V = \rho/\varepsilon_0}$$

$\exists\, G(\vec{r})$ tq $\quad V = G * \rho \quad$ (opérateur linéaire et invariant)

▶ On passe en Fourier :

$$k^2 \hat{V} = \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\rho}$$

$$\hat{V} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}}_{\hat{G}}\hat{\rho}$$

▶ TF inverse. On sait que $\widehat{\frac{1}{r}} = \frac{4\pi}{k^2} \Rightarrow \boxed{G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

▶ On peut donc écrire

$$V = G * \rho = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}'|}\, d\vec{r}'$$

Rq G est le champ d'une charge "ponctuelle" car elle vérifie

$$-\Delta G = \frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}) \rightsquigarrow k^2\hat{G} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rightsquigarrow \hat{G} = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

D. Electromagnétisme

En jauge de Lorentz

$$\begin{cases} -\square V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \end{cases} \qquad \square = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$$

⇒ considérons l'équation

$$\boxed{-\square f = g}$$

$\exists\, G(\vec{r},t)$ tq $f = g * G$ ← 4D !

▶ Passons en Fourier 4D base $e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$

$$\hat{f}(\vec{k},\omega) = \int f(\vec{r},t)\, e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\, d\vec{r}\, dt$$

$$f(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \hat{f}(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\, d\vec{k}\, d\omega$$

↳ $$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\hat{f} = \hat{g}$$

$$\hat{G} = \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

▶ TF inverse en temps =

$$G(\vec{k},t) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

⇒ pôles en $\pm kc$ on a donc le choix 1) 

ou  2)

On prend 2) (seule solution causale) ou  3)

$G(\vec{k},t) = 0$ si $t<0$ car 

si $t>0$ $$G(\vec{k},t) = \frac{1}{2\pi} \times 2i\pi \left[\mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}; -kc\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}; +kc\right)\right]$$

$$\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}} = -\frac{c}{2k}\left\{\frac{1}{\omega-kc} - \frac{1}{\omega+kc}\right\}$$

$$G(\vec{k},t) = -\frac{ic}{2k}\left(e^{ikct} - e^{-ikct}\right)$$

TF inverse en espace

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int G(\vec{k},t)\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{k}$$

On se place en coordonnées sphériques en $\vec{k}$, on choisit l'axe polaire aligné avec $\vec{r}$, si bien que $\vec{k}.\vec{r} = kr\cos\theta$

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int -\frac{ic}{2k}\left(e^{ikct} - e^{-ikct}\right) e^{ikr\cos\theta}\, k^2\sin\theta\, \underbrace{dk}_{\text{de } 0 \text{ à } +\infty}\, \underbrace{d\theta}_{\text{de } -\pi/2 \text{ à } +\pi/2}\, \underbrace{d\varphi}_{\text{de } 0 \text{ à } 2\pi}$$

$$= \frac{-ic}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}\frac{k}{2}\left(e^{ikct} - e^{-ikct}\right)\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ikr\cos\theta}\sin\theta\, d\theta}_{\substack{\frac{1}{ikr}\int_{-kr}^{+kr} e^{ix}\,dx \\ \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)}}$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_0^{+\infty}\left(e^{-ikct} - e^{ikct}\right)\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) dk$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_0^{+\infty} e^{ik(r-ct)} + e^{-ik(r-ct)} - \left(e^{ik(r+ct)} - e^{-ik(r-ct)}\right) dk$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)}\, dk$$

$$= \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r-ct) - \underbrace{\delta(r+ct)}_{=0\ \forall t>0}$$

$$G(\vec{r},t) = \frac{c}{4\pi r}\,\delta(r-ct)$$

▷ $$V(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \frac{c}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\delta\left(|\vec{r}-\vec{r}'| - c(t-t')\right)\rho(\vec{r}',t')\,d\vec{r}'\,dt'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d\vec{r}'$$ Potentiels retardés.

E- Equation de la chaleur

$$\partial_t T(\vec{r},t) = \mathcal{D}\,\Delta T$$

$$T(\vec{r},t) = T(\vec{r},0) * G_t(\vec{r})$$

$$\partial_t \hat{T} = -k^2 \mathcal{D}\hat{T}$$

$$\hat{T} = \hat{T}(\vec{k},0)\, \underbrace{e^{-\mathcal{D}k^2 t}}_{\hat{G}_t(\vec{k})}$$

TF inverse

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-\mathcal{D}k^2 t}\, e^{+i\vec{k}.\vec{r}}\, d\vec{k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\prod_j \int e^{-\mathcal{D}k_j^2 t}\, e^{ik_j r_j}\, dk_j$$

$$= \frac{1}{(4\pi\mathcal{D}t)^{3/2}} \times e^{-\frac{r^2}{4\pi\mathcal{D}t}}$$

$$TF\left(e^{-\alpha r^2}\right) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{-k^2/4\alpha}$$

$$TF^{-1}\left(e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha r^2}$$

ici $\frac{1}{4\alpha} = \mathcal{D}t$

$\alpha = \frac{1}{4\mathcal{D}t}$