VARIABLE COMPLEXE

A. Fonctions holomorphes

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, différentiable sur Ω, ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Si on assimile librement $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on peut envisager d'exprimer f non pas en fonction de x et y, mais de z et $\bar{z}$

$$z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{cases}$$

Soit F tq $f(x,y) = F(z,\bar{z})$

On peut alors définir

$\frac{\partial}{\partial z}$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Définition "Holomorphe"

> On peut définir une fonction $F(z,\bar{z})$ comme étant holomorphe en z_0 (resp. sur un ouvert Ω) si on peut écrire en z_0 (resp. pour tout point de Ω)
>
> $$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

Autrement dit, on peut écrire qu'il existe F tq $f(x,y) = F(z)$.

Là où la fonction F est holomorphe, les conditions suivantes sont vérifiées

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$ Conditions de Cauchy

$$\left(\text{car } \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0\right)$$

Dérivabilité.

Si f est différentiable en x_0, y_0, $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + o((x-x_0)) + o(y-y_0)$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\left[(x-x_0) + i(y-y_0)\right] + o(z-z_0)$

soit $F(z) = F(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z-z_0) + o(z-z_0)$

Finalement, on peut écrire que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial f}{\partial x}$$ et ce, quel que soit la façon dont $z \to z_0$!

On appelle cette limite $F'(z)$. ~~E~~comme $F'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$, il est très facile de calculer $F'(z)$: on fait comme si z était une variable réelle. $\left[\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} = F'(z)\right]$

Les fonctions holomorphes sont courantes en physique parce qu'on prolonge très souvent des fonctions d'une variable réelle dans le plan complexe. On prend $f(x)$ et on décide de considérer $f(z)$ à la place - la fonction ainsi construite est directement écrite comme une fonction de z seulement, elle est automatiquement holomorphe !

<u>Ppté n°1</u> : Une fonction holomorphe sur Ω est indéfiniment dérivable sur Ω.

<u>Ppté n°2</u> : les zéros d'une f^n holomorphe sont des points isolés.

<u>Ppté n°3</u> : Une f^n holomorphe ne peut avoir de maximum local.

En fait, les f^n holomorphes présentent des pôles isolés - des points où la fonction diverge et ce sont eux qui contrôlent pour beaucoup l'allure globale de $f(z)$. Par exemple, quand une fonction de transfert présente une résonance donc un maximum, comme ça ne peut pas être un maximum local, cette résonance est forcément liée à la présence d'un pôle.

B. Intégration

Une courbe est un ensemble connexe de $\mathbb{C}$ pour lequel on peut trouver un paramétrage, ie une application continue

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui ait la courbe pour image.

Une courbe est simple si elle ne se recoupe pas, elle est fermée si $\gamma(a) = \gamma(b)$

Deux paramétrages γ_1 et γ_2 sont équivalents si ils ont même image et si il existe $u : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ continue tq

$$\gamma_2 \circ u = \gamma_1$$

Intégrale sur un chemin.

On définit pour une fonction f et pour un chemin (courbe tq tout paramétrage soit continu et dérivable par morceaux) Γ

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

où $\gamma(t)$ est un paramétrage de Γ.

Bien sûr, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du paramétrage choisi. Si γ_1 et γ_2 sont deux paramétrages d'un même chemin, $\exists u$ continue et dérivable tq $\gamma_2 \circ u = \gamma_1$

$$\int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt \underset{t = u(t')}{=} \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2 \circ u(t'))\,\gamma_2'(u(t')).\,u'(t')\,dt'$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t'))\,\gamma_1'(t')\,dt'$$

Dans toute la suite, on ne considérera que des chemins simples

⚠ le sens de parcours du chemin importe !

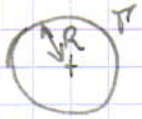
$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = -\int_b^a f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Ppté : $\displaystyle\int_{z_A}^{z_B} f'(z)\,dz = f(z_B) - f(z_A)$

Intégration - Suite -

Exemple fondamental :

Intégration de z^n avec $n \in \mathbb{Z}$ sur un cercle centré en 0.



$\gamma(t) = Re^{it}$ est une paramétrisation possible
$t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} . iRe^{it} dt = \int_0^{2\pi} iR^{n+1} e^{i(n+1)t} dt$$

si $n \neq -1$ $\quad \int_\gamma z^n dz = iR^{n+1} \left[\frac{1}{i(n+1)t} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = 0$!

si $n = 1$ $\quad \int_\gamma \frac{1}{z} dz = i \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2i\pi$

C. Théorème de Cauchy

Un ouvert convexe est un ouvert en un seul morceau.
" " simplement convexe n'a pas de trou.

Théorème :

Soit f holomorphe sur un ouvert simplement convexe Ω alors $\forall$ chemin fermé Γ de Ω

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

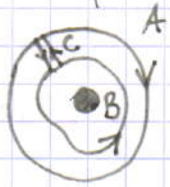
Conséquences : (chemins simples)

Pour tout chemin n'entourant pas de "trou" de l'ouvert sur lequel $f(z)$ est défini

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

Si Γ entoure un trou, ce n'est en général pas le cas.

▷ Si deux chemins entourent un même trou, alors les intégrales de f sur ces deux chemins ont même valeur (si les chemins sont parcourus dans le même sens).



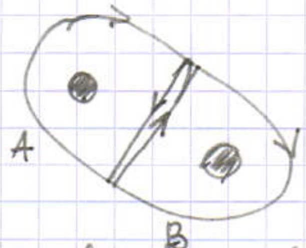
le chemin AUBUC est homotope à un point (il n'entoure pas de trou)

$$\int_{A\cup B\cup C} f\,dz = 0 = \int_{A\circlearrowright} f\,dz + \int_{B\circlearrowleft} f\,dz + \underbrace{\int_C f\,dz}_{\updownarrow \to 0}$$

d'où

$$\int_{A\circlearrowright} f\,dz = \int_{B\circlearrowright} f\,dz$$

▷ Si un chemin entoure deux trous, l'intégrale de f sur ce chemin est la somme des intégrales de f sur des chemins entourant chacun des trous.

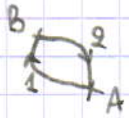


$$\int_A f\,dz + \int_B f\,dz = \int_{\circ\circ} f\,dz + \underbrace{\int_{\downarrow\uparrow} f\,dz}_{0}$$

La valeur d'une intégrale sur un chemin ne dépend que des trous qu'il entoure. C'est la somme des intégrales autour de chacun des trous.

Primitives

Sur un ensemble simplement connexe, l'intégrale sur un chemin ouvert ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée



$$\int_{A}^{B} {}_{(1)} f dz + \int_{B}^{A} {}_{(2)} f dz = \oint f dz = 0$$

D'où $\displaystyle\int_{A_{(1)}}^{B} f dz = \int_{A_{(2)}}^{B} f dz$.

$\displaystyle\int_{A}^{z} f(\xi) d\xi$ définit alors une primitive de f sur l'ouvert simplement connexe considéré.

On peut aussi définir une primitive sur un ouvert qui comporte des trous, mais il faut être prudent

- Prenons $\frac{1}{z^n}$ avec $n > 1$. Il y a une singularité en 0, mais $\int f dz = 0$ autour du pôle donc, qu'on passe à droite ou à gauche du pôle, l'intégrale sur un chemin ne dépend toujours que des points d'arrivée et de départ.
  $\Rightarrow$ On peut bien définir une primitive dans chaque cas. Bon ici, elles sont évidentes.

- Prenons $\frac{1}{z}$. Cette fois quand on tourne autour du pôle l'intégrale n'est pas nulle. Donc la valeur de l'intégrale entre deux points dépend de si on est passé à gauche ou à droite du pôle. On ne peut pas définir de primitive, sauf si on introduit une coupure = c'est une courbe suivant laquelle on découpe $\mathbb{C}$, et qui part de 0 pour aller à l'∞.

  $\mathbb{C}$ sans cette coupure est alors simplement connexe = il n'y a plus de trou, on a plus le choix de passer d'un côté ou de l'autre du pôle.

  On peut alors définir $\ln z = \int \frac{1}{z} dz$!

D - Théorème des résidus

Formule de Cauchy

Soit Ω un ouvert, f holomorphe sur Ω et Γ un chemin simple fermé dans le sens direct. Considérons z_0, un point entouré par Γ

la fonction $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z_0)-f(z)}{z_0-z} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$

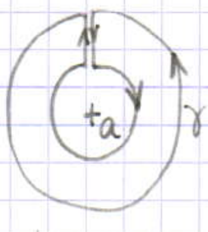
$g(z)$ est holomorphe, si bien que

$$\int_\gamma g(z)\,dz = 0 = \int \frac{f(z_0)}{z_0-z}\,dz - \int \frac{f(z)}{z_0-z}\,dz$$

$$= -f(z_0) \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz}_{2i\pi \text{ (cf exemple fondamental)}}$$

D'où $\boxed{f(z_0) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}$

Développement en série de Laurent



γ_1 = chemin extérieur circulaire

γ_2 = intérieur circulaire

Au centre de la couronne, on a éventuellement un pôle/un trou.

$\forall z$, intérieur à la couronne,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

Sur γ_1 (extérieur) $\dfrac{1}{\xi - z} = \dfrac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \dfrac{1}{\xi - a} \times \dfrac{1}{1-\frac{(z-a)}{(\xi-a)}}$

et comme $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

A l'intérieur $\left|\frac{\xi-a}{z-a}\right| < 1$

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-a-(z-a)} = \frac{-1}{(z-a)} \times \frac{1}{1-\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)} = -\frac{1}{(z-a)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n}$$

$$= -\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

D'où

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} f(\xi)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi + \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} f(\xi)\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2i\pi}\left(\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi\right)(z-a)^n}$$

↳ γ_1 ou γ_2, peut importe, car $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$ est holomorphe.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

Csq : $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = a_{-1}\cdot 2i\pi}$ si γ entoure a

a_{-1} est le <u>résidu</u> de f en a.

<u>Développement en série entière</u>

Si $f(z)$ est holomorphe en a, il ne peut y avoir de terme en $\frac{1}{z^n}$ dans le développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

avec $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi$ d'où l'expression intégrale de $\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi}$

Théorème des résidus

Soit Ω un ouvert simplement connexe et f holomorphe sur Ω sauf aux points $\{P_i\}$ alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \left(\sum_{P_i \subset \gamma} \mathrm{Res}(f, P_i)\right) \times 2i\pi$$

Pôles et résidus

Si le développement de Laurent de f en a s'arrête $\forall n < -N$, alors on dit que a est un pôle de f d'ordre N. Un pôle d'ordre 1 est un pôle simple.

- Comment trouver le résidu d'un pôle simple ?

Facile = $\lim\limits_{z \to a} (z-a) \cdot f(z) = a_{-1}$

Pour un pôle d'ordre 2, ça marche pas, mais

$$(z-a)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-a) + g(z) \cdot (z-a)^2$$

$\hookrightarrow$ holomorphe en a.

$\Rightarrow \lim\limits_{z \to a} \left((z-a)^2 f(z)\right)' = a_{-1}$ et $g'(z-a)^2 + 2(z-a)g \xrightarrow[z \to a]{} 0$

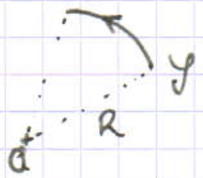
- Plus généralement pour un pôle d'ordre k

$$\lim_{z \to a} \left((z-a)^k f(z)\right)^{(k-1)} = a_{-1}$$

- Pour trouver l'ordre d'un pôle, on peut tenter un développement asymptotique en a.

E- lemmes de Jordan

On considère un arc de cercle centré en 0.



Soit f continue sur γ

$$\lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = 0 \implies \lim_{R\to+\infty} \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\lim_{|z|\to 0} z f(z) = 0 \implies \lim_{R\to 0} \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$