1. Introduction

En physique on n'a en fait que des fonctions continues et dérivables. Les fonctions discontinues ou pas dérivables doivent donc être vues comme des fonctions continues et dérivables "vues de loin". Bref, un peu comme des limites de suites de fonctions = les distributions.

Comme on ne sait pas bien définir la convergence d'une suite de fonctions vers quelque chose qui n'est pas une fonction on va plutôt regarder vers quoi tendent les produits scalaires

$$\forall \varphi \quad \lim_{n \to +\infty} \int f_n \cdot \varphi = ?$$

Comme finalement, ce qui compte c'est vers quoi convergent les produits scalaires, on va dire qu'une distribution est définie par ses produits scalaires, ie la donnée de

$$\forall \varphi \quad \int \alpha . \varphi$$

distribution

On va dire qu'une suite de f^n tend vers α si

$$\forall \varphi \quad \lim_{n \to +\infty} \int f_n \varphi = \int \alpha \varphi$$

et on s'autorisera à écrire $\lim_{n \to +\infty} f_n = \alpha$

Ensuite, comme les distributions sont "moralement" des limites de suites de fonctions, on va vouloir donner un sens à des choses comme

$$\alpha(ax) \;,\; \alpha'(x) \;,\; \alpha(x - x_0) \;,\; \alpha * \beta \;,\; TF(\alpha)$$

A chaque fois, l'idée est la même = généraliser aux distributions ce qu'on fait aux fonctions. En gros =

$\alpha(ax) = \lim_{n \to +\infty} f_n(ax)$, ce qui signifie en fait que

$$\int \alpha(ax)\, \varphi(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int f_n(ax)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int f_n(X)\, \varphi\left(\frac{X}{a}\right) \frac{dX}{a} \quad \text{si } a > 0$$

▶ $$\int \alpha(ax)\, \varphi(x)\, dx = \int \alpha(x) \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

du coup, on définit la distribution $\alpha(ax)$ par ses produits scalaires connaissant ceux de $\alpha(x)$

▶ $\forall \varphi \quad \int \alpha(ax)\,\varphi(x)\,dx = \int \alpha(x) \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) dx$

De même la dérivée d'une distribution, c'est la limite des dérivées de la suite. Comme pour les produits scalaires, on a

$\int f_n' \varphi = - \int f_n \varphi' \qquad$ (ipp et $f_n \varphi \underset{\pm\infty}{\to} 0$)

On définit $\alpha'(x)$ par

▶ $$\int \alpha'(x)\varphi(x)\,dx = - \int \alpha(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Exemples :

δ, distribution de Dirac tq

$\forall \varphi \quad \int \delta \varphi = \varphi(0) \qquad \lim_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \delta(x)$

$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x>0 \end{cases}$ doit être vue comme une distribution. elle n'est pas continue en 0.

C'est quoi $H'(x)$? Facile :

$\forall \varphi \int H'(x)\,\varphi(x)\,dx = - \int H(x)\,\varphi'(x)\,dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$

$= \varphi(0)$

Donc $\boxed{H' = \delta}$

Comme H, distribution, est "fausseument discontinue", sa dérivée n'est pas nulle en 0 !

▶ Translatée d'une distribution : $\alpha(x - x_0)$

$$\int \alpha(x-x_0)\,\varphi(x)\,dx = \int \alpha(x)\,\varphi(x+x_0)\,dx$$

Et voilà ! Maintenant, on est prêt à envisager la convolution de deux distributions...

B. Convolution

Produit de convolution de deux fonctions

$$f*g\,(x) = \int f(x')\,g(x-x')\,dx'$$

si f et g sont assez gentilles pour permettre cette opération (f^u test par exemple)

▶ PROPRIÉTÉS :

1. Commutativité.

$$f*g\,(x) = \int f(x')\,g(x-x')\,dx' \underset{\substack{X = x-x' \\ dX = -dx'}}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-X)\,g(X)\,(-dX) = g*f\,(x)$$

2. Associativité.

$$\begin{aligned}(f*g)*h &= \int \int f(x'')\,g(x'-x'')\,dx''\,.\,h(x-x')\,dx' \\ &= \int f(x'') \int g(x'-x'')\,h(x-x')\,dx'\,dx'' \qquad X = x'-x'' \\ &= \int f(x'') \int g(X)\,h(x-x''-X)\,dX\,dx'' \\ &= f*(g*h)\end{aligned}$$

3. $1*f = \int f$ si $\int f$ existe

d'où $\int f*g = 1*f*g = \underbrace{\int f}_{\text{constante}} * g = \int f \,.\int g$ si toutes ces intégrales existent...

$$\int f*g = \int f\,.\int g$$

4. $(f*g)' = \int f(x')\,g'(x-x')\,dx' = f*g' = f'*g$ par commutativité.

Exemples ... en exercice !

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| < \frac{1}{2} \ (\text{ie } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\Pi*\Pi(x) = \Lambda(x) = \begin{cases} 1+x \text{ si } x \in [-1,0] \\ 1-x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{a}} * \frac{1}{\sqrt{\pi b}}e^{-\frac{x^2}{b}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(a+b)}}e^{-\frac{x^2}{(a+b)}}$$

FONDAMENTAL ! (Utiliser $\int e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$)

Convolution de distributions

On fait "comme si" α et β étaient des fonctions, juste pour voir...

$$\int \alpha * \beta . \varphi = \int \int \alpha(x') \beta(x-x') \varphi(x) \, dx dx'$$
$$= \int \alpha(x') \int \beta(x-x') \varphi(x) \, dx . dx' \qquad y = x - x'$$
$$= \int \alpha(x') \int \beta(y) \varphi(x'+y) \, dy dx'$$

Ça permet, si on connaît les produits scalaires de α et de β, de définir celui de $\alpha * \beta$ de façon unique !

Definition :

$\alpha * \beta$ est la distribution définie par

$$\int \alpha * \beta . \varphi = \int \alpha(x) \beta(y) \varphi(x+y) \, dx dy$$

▶ PROPRIÉTÉS

1. Commutativité - Evidente

2. Associativité - Elle marche aussi, mais ⚠

$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ si $\alpha * \gamma$ existe aussi !

3. 1 est une distribution - par ex. $1 = \lim_{a \to +\infty} e^{-x^2/a}$

et $\forall \varphi \quad \int 1 . \varphi = \int \varphi$

$$\int 1 * \alpha . \varphi = \int \alpha(x) \varphi(x+y) \, dx dy = \int \alpha(x) \int \varphi \, dx$$
$$= \int \varphi . \int \alpha$$

↑ si ça existe ! ex : $\int \delta = 1$ mais $\int H$?

D'où $1 * \alpha = \int \alpha$ et donc $\int \alpha * \beta = \int \alpha . \int \beta$

4. $\underline{\underline{\alpha * \delta = \alpha}}$

car $\int \alpha(x) \delta(y) \varphi(x+y) \, dy dx = \int \alpha(x) \varphi(x) \, dx$

$\Rightarrow$ δ est l'élément neutre pour la convolution !

On peut donc tjs écrire $\int \alpha(x') \delta(x-x') dx' = \alpha(x)$ que α soit une f° ou une distribution

5. $\alpha * \delta(x-a) = \int \alpha(x') \delta(x-x'-a) \, dx' = \alpha(x-a)$

Mieux fait : $\int \alpha(x) \delta(y-a) \varphi(x+y) \, dy dx = \int \alpha(x) \varphi(x+a) \, dx = \int \alpha(x-a) \varphi(x) dx$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha * \delta(x-a) = \alpha(x-a)}}$

6- $\alpha * \delta' = \alpha'$

car $\int \alpha * \delta' \varphi = \int \alpha(x) \int \delta'(y) \varphi(x+y) dy\, dx = - \int \alpha(x) \int \delta(y) \varphi'(x+y) dy\, dx$

$= - \int \alpha(x) \varphi'(x) dx = \int \alpha'(x) \varphi(x) dx$

$\Rightarrow$ on peut écrire $\int \alpha(x') \delta'(x-x') dx' = \alpha'(x)$ que α soit une f^n ou une distribution.

et même si le produit de deux distributions n'existe pas !

Ex : δ^2 n'existe pas / n'est pas défini, mais $\delta * \delta = \delta$!

7- $(\alpha * \beta)' = \alpha * \beta * \delta' = \alpha * \beta'$ | Comme pour les fonctions.

$= \alpha' * \beta$

Conclusion :

On peut faire, dans le cadre du produit de convolution, exactement comme si les distributions étaient des fonctions (tout ça pour ça !)
Au passage, on aura vu le rôle essentiel de δ, δ' dans l'histoire... et on aura montré que la translation et la dérivation sont en fait des convolutions (au sens des distributions).