Polytech Clermont-Ferrand

2019-2020

Projet 4A GMM

Expression de contraintes géométriques et analyse matricielle - Application à la Robotique

Projet réalisé par :

Titouan GABORIAU

Félix LAURIER

Projet encadré par :

François BOUCHON

Sébastien LENGAGNE

TABLE DES MATIERES

TABLE DES FIGURES

Introduction

Ce projet s'inscrit dans le cadre de notre quatrième année de formation d'ingénieurs en Génie Mathématique et Modélisation à Polytech Clermont-Ferrand. Un ensemble de sujets était proposé par les enseignants-chercheurs de l'école, avec pour but pour les étudiants de découvrir le monde de la recherche.

Notre binôme composé de Titouan GABORIAU et Félix LAURIER a alors choisi ce sujet d'application des mathématiques à la robotique, afin d'avoir une idée plus précise des domaines d'utilisation des mathématiques pures dans l'industrie.

I- Contexte et objectifs du projet

Les motivations du projet proviennent des travaux de Sébastien Lengagne dans le domaine de la robotique. Afin de modéliser les problèmes géométriques intervenant dans ce domaine, tels que le déplacement d'un robot ou de ses membres, on est amenés à rechercher des solutions à des problèmes d'optimisation sous contraintes.

L'objectif général est de trouver le minimum (ou le maximum) d'une fonction polynôme de degré n, dans un intervalle [t1;t2] donné.

Cette fonction s'écrit alors :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

On va alors approximer ce polynôme par un ensemble de fonctions B-splines (voir partie dédiée), ce qui va donner :

$$f(t) = \sum_i p_i * b_i(t)$$

On a ici p_i les points de contrôle et b_i les fonctions de base.

Si l'on place les points de contrôle dans une matrice P, et les coefficients (a_0, …, a_n) dans une matrice A, on obtient la relation suivante :

$$A = B * P$$

En résumé, on a pour contraintes sur le vecteur inconnu X : $\underline{F} < AX < \overline{F}$ avec les vecteurs $\underline{F}$, $\overline{F}$ ainsi que la matrice A donnés.

On souhaite déduire de cette formule un encadrement de X, mais cela ne semble possible que dans le cas où on sait A monotone (c'est-à-dire si elle est inversible et que son inverse A^{-1} n'a que des coefficients positifs). Dans ce cas, on aurait évidemment :

$$A^{-1}\,\underline{P} < X < A^{-1}\,\overline{P}$$

Mais il est impossible d'écrire cette relation lorsque l'on n'a pas d'informations sur le signe des coefficients de A^{-1} (ce qui est le cas dans notre problème, avec des dimensions très grandes).

La seule écriture possible serait :

$$-\,|A^{-1}|\max\left(|\underline{P}|,|\overline{P}|\right) < X < \,|A^{-1}|\max\left(|\underline{P}|,|\overline{P}|\right)$$

Avec |.| la matrice (respectivement le vecteur) dans laquelle chacun des coefficients est remplacé par sa valeur absolue, mais cet encadrement s'avère trop grossier et sans intérêt pratique.

L'objectif initial de ce projet est donc de rechercher le moyen d'obtenir un encadrement de X dans le cas général, en étudiant la structure de la matrice A, et en exploitant le fait que le contexte du travail amène à utiliser des produits de Kronecker (voir partie dédiée).

II- <u>Les termes du sujet</u>

Nos premières recherches se sont axées sur la compréhension du sujet donné, et notamment sur les notions de fonctions B-splines et de produit de Kronecker entre deux matrices.

1- Les fonctions B-splines

Une B-spline est une combinaison de splines positives, les splines étant des fonctions définies par morceaux par des polynômes. Ces fonctions sont très utilisées dans les problèmes d'interpolation.

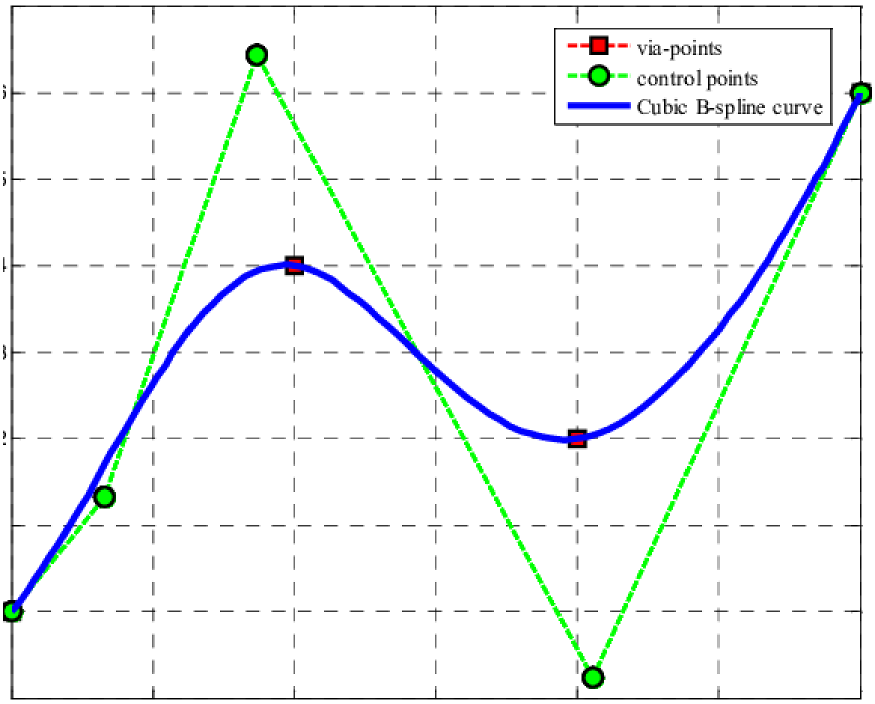

Figure 1: exemple de B-spline

Une interpolation par B-spline est donc construite sous la forme

$$S(t) = \sum_{i=0}^{m-n-1} b_{i,n}(t) * P_i$$

avec n le degré des fonctions B-splines, $m + 1$ le nombre de nœuds t_i dans $[0\,;1]$ et Pi l'ensemble des points de contrôle (au nombre de $m - n$).

Les $(m-n)$ B-splines sont elles définies par récurrence de la sorte :

$$b_{j,0}(t) \coloneqq \begin{cases} 1 & si\ t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$b_{j,n}(t) \coloneqq \frac{t-t_j}{t_{j+n}-t_j} b_{j,n-1}(t) + \frac{t_{j+n+1}-t}{t_{j+n+1}-t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(t)$$

De plus, les B-splines sont dites uniformes lorsque les différents nœuds t_j sont équidistants.

Pour ce qui est de leurs propriétés, on sait notamment que la somme des B-splines sera toujours égale à 1.

En outre, la courbe se trouve toujours à l'intérieur de ce qu'on appelle l'enveloppe convexe (définition ci-dessous) des points de contrôle.

On sait aussi que toutes les B-splines ainsi que leurs dérivées sont continues (elles ont d'ailleurs autant de dérivées que de nœuds – 1)

Enfin, une B-spline $b_{i,n}(t)$ est non nulle uniquement dans l'intervalle $[t_j\ ; t_{j+1}]$, et est dans ce cas strictement positive. Cela signifie que modifier un point de contrôle ne va entraîner qu'une modification locale (dans un seul intervalle) de l'allure de la courbe.

Pour ce qui est de l'enveloppe convexe, il s'agit de l'ensemble convexe le plus petit parmi ceux qui le contiennent. Un ensemble est convexe lorsque tout segment pouvant être tracé entre deux points de l'ensemble se trouve en intégralité contenu dans celui-ci. L'enveloppe convexe est donc le plus petit ensemble contenant tous les éléments.

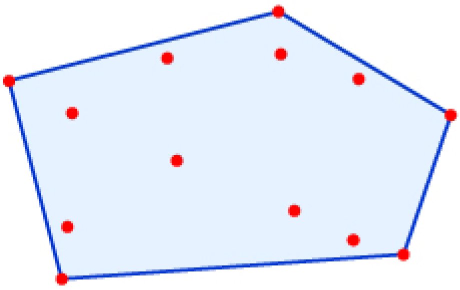

Figure 2: exemple d'enveloppe convexe

Le lien avec les B-splines est le suivant : puisque la courbe se trouve toujours à l'intérieur de cette enveloppe, cela implique que la B-spline va toujours être contenue entre le minimum et le maximum des points de contrôle.

2- Le produit de Kronecker

Le produit de Kronecker est un cas particulier du produit tensoriel.

Prenons deux matrices $A \in M_{m,n}(R)$ et $B \in M_{p,q}(R)$, le produit de Kronecker de A par B donnera une matrice de $M_{mp,nq}(R)$ notée $A \otimes \mathrm{B}$ définie par :

$$A \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Ce produit dispose des propriétés suivantes :

- Distributif par rapport à l'addition des matrices : $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{C} + \mathrm{B} \otimes \mathrm{C}$

- Si les tailles sont compatibles, $(A \otimes C)\,(B \otimes D) = (AB \otimes CD)$

- Pour le transposé, $(A \otimes B)' = (A' \otimes B')$

- Pour l'inverse, si A et B sont inversibles, $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^{-1} = (\mathrm{A}^{-1} \otimes \mathrm{B}^{-1})$

Le lien avec notre problème est que lorsque l'on travaille en dimension supérieure ou égale à 2 (lorsque plusieurs variables interviennent), notre matrice B peut s'écrire comme le produit de Kronecker $B = B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_n$.

III- Exemple de fonctions

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à des exemples afin d'étudier ce problème sous un aspect plus concret. Nous nous sommes focalisés sur les fonctions en dimension 1. Nous n'allons donc pas développer plus sur le produit de Kronecker utilisé pour des dimensions plus grandes. Nous avons donc décidé de présenter l'étude de fonctions de degré 1 et de degré 2.

1 - Fonctions de degré 1

Pour ce premier exemple, nous avons choisi une fonction de degré 1 (donc k=1) qui sera par conséquent de la forme $f(t) = \alpha + \beta t$. Nous prenons également 2 points de contrôle P_0, P_1 (donc n=2). On aura ainsi un vecteur nodal V de longueur m = k+n+1 = 4.

$$V = [t_0; t_1; t_2; t_3]$$

Pour obtenir les fonctions de bases, on peut utiliser différents algorithmes qui permettent de les calculer. Ici, on a utilisé le plus simple en petite dimension : l'algorithme de Cox-de Boor. Cet algorithme utilise la relation de récurrence suivante :

$$B_{i,0}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t_i \le x < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,p}(x) := \frac{x - t_i}{t_{i+p} - t_i} B_{i,p-1}(x) + \frac{t_{i+p+1} - x}{t_{i+p+1} - t_{i+1}} B_{i+1,p-1}(x).$$

La fonction sur laquelle on va travailler dans cette partie peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,k}(t)$$

Donc pour la fonction que l'on va étudier, on a :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{1} P_i B_{i,1}(t) = B_{0,1}(t)\, P_0 + B_{1,1}(t)\, P_1$$

Il faut ainsi calculer les deux fonctions de base suivantes :

- $B_{1,1}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} B_{1,0}(t) + \frac{t_3-t}{t_3-t_2} B_{2,0}(t)$

- $B_{0,1}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} B_{0,0}(t) + \frac{t_2-t}{t_2-t_1} B_{1,0}(t)$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[t_0; t_1]$ alors :

- $B_{1,1}(t) = 0$ et $B_{0,1}(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[t_1; t_2]$ alors :

- $B_{1,1}(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ et $B_{0,1}(t) = \frac{t_2-t}{t_2-t_1}$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[t_2; t_3]$ alors :

- $B_{1,1}(t) = \frac{t_3-t}{t_3-t_2}$ et $B_{0,1}(t) = 0$

Donc si l'on prend t_1 = a et t_2 = b, on obtient les fonctions de base suivantes :

$B_{1,1}(t) = \frac{t-a}{b-a}$ et $B_{0,1}(t) = \frac{b-t}{b-a}$ sur $[a ; b]$

Le graphique ci-dessous représente les fonctions b-splines de base sur l'intervalle $[0\,;1]$.

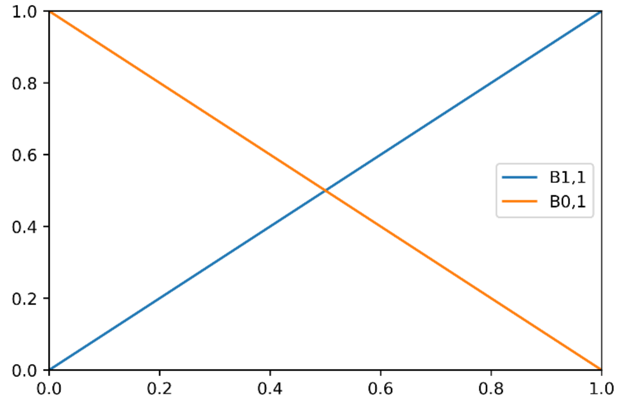

Figure 3: B-splines de base sur [0 ;1]

Si l'on change d'intervalle alors on obtiendra des droites différentes. Malgré tout, la somme des deux droites fera toujours 1 peu importe l'intervalle que l'on prendra. Sur l'exemple ci-dessous, l'intervalle choisi est $[1\,;5]$.

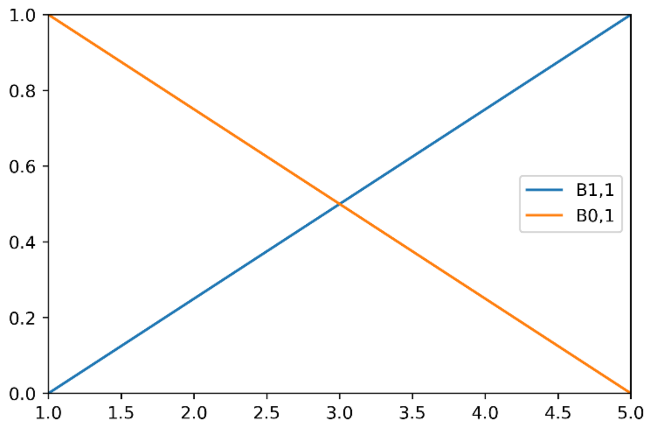

Figure 4: B-splines de base sur [1;5]

Après avoir calculé ces fonctions de base, on peut en déduire la matrice correspondante :

$M = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$

On prend pour cet exemple la fonction de degré 1 : $f(x) = \alpha + \beta t$

On a donc, sous forme matricielle, les égalités suivantes :

$$f(x) = (1 \quad x)(\alpha \quad \beta)^T$$
$$f(x) = (1 \quad x)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}(P_0 \;\; P_1)^T \;\; \langle = \rangle \;\; F = (1 \quad x)\, M^{-1}\, P^T$$

On obtient la relation suivante :

$$(\mathrm{P}^0\ \mathrm{P}^1)^T = M\,(\alpha \quad \beta)^T$$

On veut vérifier que tous les points de contrôle sont compris entre deux valeurs Min et Max que l'on définira dans cet exemple et qui correspondent aux maximum et minimum des points de contrôle. Ainsi, on doit vérifier l'inégalité suivante :

$$(\alpha \quad \beta)^T < M^{-1}\, {V_{Max}}^T \;\; \text{et} \;\; (\alpha \quad \beta)^T > M^{-1}\, {V_{Min}}^T$$

où ${V_{Max}}^T$ et ${V_{Min}}^T$ sont des vecteurs contenant respectivement les valeurs Max et Min.

$$\langle = \rangle \begin{pmatrix} 2\,Min \\ (a+b)\,Min \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2\,Max \\ (a+b)\,Max \end{pmatrix}$$

On peut donc tracer un graphique ayant pour abscisse α et pour ordonnée β qui nous permettra de visualiser les valeurs qui respectent les critères. Sur cet exemple, nous avons choisi de prendre comme valeur minimale Min = 1 et comme valeur maximale Max = 6.

De plus, nous travaillons sur l'intervalle I $=[a\,;b]$. Nous avons pris, dans un premier temps, a=1 et b=3 et nous obtenons le graphique suivant (fig.5) :

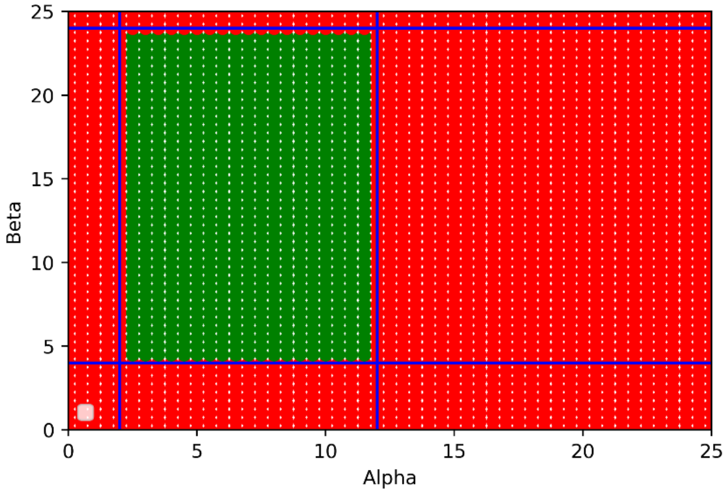

Figure 5: beta en function de alpha pour a=1 et b=3

On peut voir que seulement certaines fonctions respectent les conditions de Min et Max. Ainsi, par exemple, la fonction $f(t) = 5 + 10t$ satisfait bien les inégalités. Tous les points de contrôle seront donc bien compris entre la valeur Min et la valeur Max défini dans cet exemple. Ce n'est pas le cas de la fonction $f(t) = 2 + 1t$.

Si l'on change l'intervalle I=$[a\,;b]$ alors on obtiendra une zone différente. Ainsi si l'on prend a=0 et b=2, on aura le graphique suivant (fig.6) :

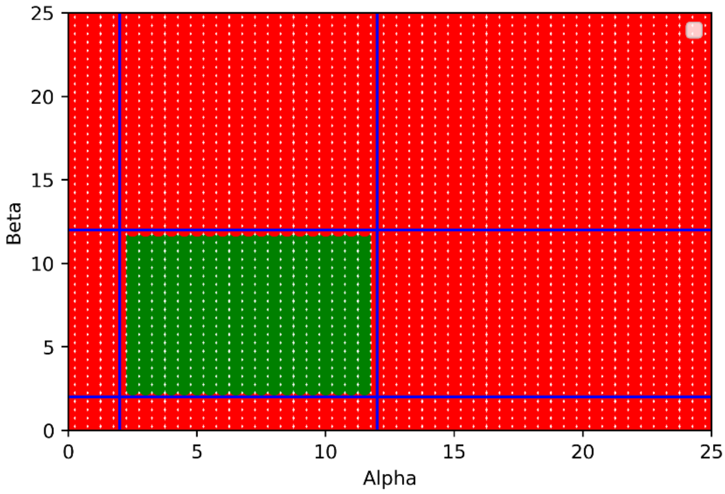

Figure 6: beta en function de alpha pour a=0 et b=2

Sur cet intervalle, la zone est réduite et certaines fonctions, qui étaient valables dans le premier cas ne seront plus valables dans ce cas-ci. Prenons par exemple la fonction de degré 1 $g(t) = 5 + 15t$. Dans ce cas précis, les points de contrôle correspondant à la fonction g sur l'intervalle J =$[0; 2]$ ne respectent pas les critères donnés (Min=1 et Max=6) tandis que sur l'intervalle I =$[1; 3]$, les points de contrôle seront bien entre la valeur Min et la valeur Max.

2 - Fonctions de degré 2

Dans cette partie, nous allons étudier des fonctions de degré 2 (donc k=2). Elles seront donc de la forme $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$. Nous prendrons, comme dans le premier exemple étudié 3 points de contrôle P_0, P_1, P_2 (donc n=3). On aura donc un vecteur nodal de longueur m = k+n+1 = 6 :

$$V= [t_0; t_1; t_2; t_3; t_4; t_5]$$

Cet exemple va nous permettre de comparer les résultats trouvés dans la première partie (donc avec une fonction de degré 1) avec ceux que l'on trouvera dans cette partie (avec des fonctions de degré 2). On pourra alors voir s'il y a des similitudes ou non entre ces fonctions.

On utilisera le même algorithme (l'algorithme de Cox de Boor) afin de trouver les fonctions de bases. La fonction f peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_{i,k}(t)$$

Donc pour la fonction que l'on va étudier, on a :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i B_{i,2}(t) = B_{0,2}(t)\, P_0 + B_{1,2}(t) P_1 + B_{2,2}(t)\, P_2$$

Il faut ainsi calculer les deux fonctions de base suivantes :

- $B_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0}\ B_{0,1}(t)\ +\ \frac{t_3-t}{t_3-t_1}\ B_{1,1}(t)$

$= \frac{t-t_0}{t_2-t_0}\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} B_{0,0}(t)\ +\ \frac{t_2-t}{t_2-t_1} B_{1,0}(t)\right) + \frac{t_3-t}{t_3-t_1}\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} B_{1,0}(t)\ +\ \frac{t_3-t}{t_3-t_2} B_{2,0}(t)\right)$

- $B_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1}\ B_{1,1}(t)\ +\ \frac{t_4-t}{t_4-t_2}\ B_{2,1}(t)$

$= \frac{t-t_1}{t_3-t_1}\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} B_{1,0}(t)\ +\ \frac{t_3-t}{t_3-t_2} B_{2,0}(t)\right) + \frac{t_4-t}{t_4-t_2}\left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2} B_{2,0}(t)\ +\ \frac{t_4-t}{t_4-t_3} B_{3,0}(t)\right)$

- $B_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2}\ B_{2,1}(t)\ +\ \frac{t_5-t}{t_5-t_3}\ B_{3,1}(t)$

$= \frac{t-t_2}{t_4-t_2}\left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2} B_{2,0}(t)\ +\ \frac{t_4-t}{t_4-t_3} B_{3,0}(t)\right) + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}\left(\frac{t-t_3}{t_4-t_3} B_{3,0}(t)\ +\ \frac{t_5-t}{t_5-t_4} B_{4,0}(t)\right)$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{t_0}; \boldsymbol{t_1}]$ alors :

- $B_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0}\frac{t-t_0}{t_1-t_0}$ et $B_{1,2}(t) = 0$ et $B_{2,2}(t) = 0$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{t_1}; \boldsymbol{t_2}]$ alors :

- $B_{0,2}(t) = \frac{t-t_0}{t_2-t_0}\frac{t_2-t}{t_2-t_1} + \frac{t_3-t}{t_3-t_1}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ et $B_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ et $B_{2,2}(t) = 0$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{t_2}; \boldsymbol{t_3}]$ alors :

- $B_{0,2}(t) = \frac{t_3-t}{t_3-t_1}\frac{t_3-t}{t_3-t_2}$ et $B_{1,2}(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1}\frac{t_3-t}{t_3-t_2} + \frac{t_4-t}{t_4-t_2}\frac{t-t_2}{t_3-t_2}$

et $B_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2}\frac{t-t_2}{t_3-t_2}$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{t_3}; \boldsymbol{t_4}]$ alors :

- $B_{0,2}(t) = 0$ et $B_{1,2}(t) = \frac{t_4-t}{t_4-t_2}\frac{t_4-t}{t_4-t_3}$ et $B_{2,2}(t) = \frac{t-t_2}{t_4-t_2}\frac{t_4-t}{t_4-t_3} + \frac{t_5-t}{t_5-t_3}\frac{t-t_3}{t_4-t_3}$

Si l'on prend t appartenant à l'intervalle $[\boldsymbol{t_4}; \boldsymbol{t_5}]$ alors :

- $B_{0,2}(t) = 0$ et $B_{1,2}(t) = 0$ et $B_{2,2}(t) = \frac{t_5-t}{t_5-t_3}\frac{t_5-t}{t_5-t_4}$

L'intervalle $[t_2; t_3]$ est intéressant car c'est le seul intervalle ayant les trois fonctions de base non nulles. Ainsi, on peut prendre t_1 = a et t_4 = b ainsi que t_2 = a et t_3 = b. On obtient ainsi les fonctions b-splines suivantes :

$B_{0,2}(t) = \frac{b-t}{b-a}\frac{b-t}{b-a} = \frac{(b-t)^2}{b-a} = \frac{t^2-2bt+b^2}{b-a}$ et

$B_{1,2}(t) = \frac{t-a}{b-a}\frac{b-t}{b-a} + \frac{b-t}{b-a}\frac{t-a}{b-a} = \frac{2((b-t)(t-a))}{b-a} = \frac{(-2t^2+2(a+b)t-2ab)^2}{b-a}$

et $B_{2,2}(t) = \frac{t-a}{b-a}\frac{t-a}{b-a} = \frac{(t-a)^2}{b-a} = \frac{t^2-2at+a^2}{b-a}$ sur $[a\,; b]$

Le graphique ci-dessous (fig.7) représente les fonctions b-splines de base sur l'intervalle [1 ; 3].

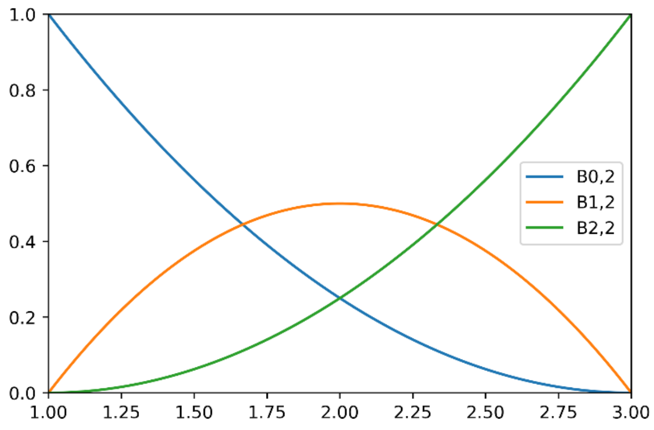

Figure 7: fonctions de base sur [1 ;3]

On met ensuite le problème sous forme matricielle. Les fonctions de base explicitées ci-dessus permettent de trouver la matrice contenant les coefficients :

$$M = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & -2b & b^2 \\ -2 & 2(a+b) & -2ab \\ 1 & -2a & a^2 \end{pmatrix}$$

Si l'on reprend les mêmes valeurs pour a et pour b que dans la première partie pour les fonctions de degré 1, alors on obtient :

- Pour a=1 et b=3 : on a bien la matrice M inversible et on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{21}{11} \\ -\frac{3}{22} & -\frac{2}{11} & -\frac{5}{22} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

On retrouve ainsi l'égalité $(\mathrm{P}^0\ \mathrm{P}^1\ \mathrm{P}^2)^T = M\ (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T$

On doit ainsi vérifier les conditions suivantes :

$$(\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T < \ M^{-1}\, {V_{Max}}^T \quad \text{et} \quad (\alpha \quad \beta \quad \gamma)^T > M^{-1}\, {V_{Min}}^T$$

où ${V_{Max}}^T$ et ${V_{Min}}^T$ sont des vecteurs contenant respectivement les valeurs Max et Min.

Si l'on reprend les mêmes conditions limite que pour les fonctions de degré 1 alors on a Min=1 et Max=6.

$$\langle = \rangle \begin{pmatrix} \frac{26}{22}\ Min \\ -\frac{12}{22}\ Min \\ -\frac{6}{11} Min \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \frac{26}{22}\ Max \\ -\frac{12}{22}\ Max \\ -\frac{6}{11} Max \end{pmatrix}$$

Si l'on reprend les mêmes conditions limite que pour les fonctions de degré 1 alors on a Min=1 et Max=6.

$$\langle = \rangle \begin{pmatrix} \frac{26}{22} \\ -\frac{12}{22} \\ -\frac{6}{11} \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} \frac{156}{22} \\ -\frac{72}{22} \\ -\frac{36}{11} \end{pmatrix}$$

Si les coefficients de la fonction f sont bien compris entre les valeurs présentes ci-dessus alors les points de contrôle respecteront bien les conditions. Tout comme pour les fonctions de degré 1, certaines fonctions respecteront les conditions Min et Max sur certains intervalles et pas d'autres. Il est donc difficile de trouver des similitudes précises entre ces deux exemples.

Conclusion

Pour conclure, nous avons dans un premier temps effectué des recherches sur les fonctions b-splines. Cela nous a permis de comprendre plus en détail le fonctionnement du problème et le rôle des points de contrôle dans celui-ci. Nous avons ensuite travaillé sur le produit de Kronecker qui est utilisé pour les fonctions de dimension supérieure à 1.

Par la suite, nous avons étudié différents exemples afin de voir si on pouvait y trouver des similitudes. Pour cela, nous avons choisi de se concentrer sur l'étude de fonctions en dimension 1. Nous avons donc délaissé l'utilisation du produit de Kronecker afin de se concentrer sur des cas particuliers en dimension 1. Ainsi, des recherches sur les fonctions de degré 1 et de degré 2 ont été effectuées. On a pu ainsi voir que certaines fonctions et leurs points de contrôle respectaient les critères sur certains intervalles mais ce n'était pas le cas sur tous. On retrouve la même conclusion pour les fonctions de degré 2. Il est donc difficile de donner précisément les fonctions qui possèdent des points de contrôle se trouvant entre les bornes Min et Max.

Ce projet fut très intéressant car il nous a permis de nous initier au travail de recherche sur un sujet lié à notre cursus scolaire. Cependant, il nous a été difficile de bien comprendre le sujet et de concilier le reste de notre emploi du temps avec des recherches régulières sur ce sujet.

Bibliographie

https://en.wikipedia.org/wiki/De_Boor%27s_algorithm

https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull

https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product

https://en.wikipedia.org/wiki/B-spline

https://gprolog.org pour le produit de Kronecker

https://www.researchgate.net/figure/An-example-of-Cubic-B-spline-curve-shows-an-example-of-Cubic-B-spline-curve-In-this_fig3_286573246

Annexes

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Cas avec a=0, b=1 et
fig=plt.figure()
x = np.linspace(0, 1, 100)
y1 = x
y2 = 1-x
plt.plot(x, y1, label="B1,1")
plt.plot(x, y2, label="B0,1")
plt.legend()

plt.xlim(0, 1)
plt.ylim(0, 1)
plt.savefig("Exemple1.png", dpi=400)
plt.show()
```

Figure 8: Programme traçant les fonctions de bases pour une fonction de degré 1 sur I=[0;1]

```python
def graph_degré1(a,b) :

    fig=plt.figure

    x = np.linspace(a, b, 100)

    #Les 2 fonctions de base
    y1 = (x-a)/(b-a)
    y2 = (b-x)/(b-a)

    plt.plot(x, y1, label="B1,1")
    plt.plot(x, y2, label="B0,1")

    plt.legend()

    plt.xlim(a, b)
    plt.ylim(0, 1)

    plt.savefig("Exemple2.png", dpi=400)
    plt.show()

graph_degré1(1,5)
```

Figure 9: Programme traçant les fonctions de bases pour une fonction de degré 1 sur I=[a;b] a,b quelconque

```python
def graph_degré2(a,b) :

    fig=plt.figure

    t = np.linspace(a, b, 100)
    t1=a
    t2=a
    t3=b
    t4=b
    #Les 2 fonctions de base
    y1 = ((t3-t)/(t3-t1)) * ((t3-t)/(t3-t2))
    y2 = ((t-t1)/(t3-t1)) * ((t3-t)/(t3-t2)) + ((t4-t)/(t4-t2)) * ((t-t2)/(t3-t2))
    y3 = ((t-t2)/(t4-t2)) * ((t-t2)/(t3-t2))


    plt.plot(t, y1, label="B0,2")
    plt.plot(t, y2, label="B1,2")
    plt.plot(t, y3, label="B2,2")

    plt.legend()

    plt.xlim(a, b)
    plt.ylim(0, 1)

    plt.savefig("Exemple3.png", dpi=400)
    plt.show()

graph_degré2(1,3)
```

Figure 10 : Programme traçant les fonctions de bases pour une fonction de degré 2 sur I=[a;b] a,b quelconque

```python
fig=plt.figure()

def limite(a,b,Min,Max) :

    fig=plt.figure()

    x = np.linspace(0,25,51)
    y = np.linspace(0,25,51)


    #Droites limites pour les alpha
    plt.axvline(x=2*Min,color="blue")
    plt.axvline(x=2*Max,color="blue")

    #Droites limites pour les beta
    y1 = (a+b)*Min +0*x
    y2 = (a+b)*Max +0*x
    plt.plot(x, y1, color="blue")
    plt.plot(x, y2, color="blue")

    #On regarde en quels alpha et beta les conditions sont respectées
    for i in x :
        for j in y :
            if (i>2*Min)and(i<2*Max)and(j>(a+b)*Min)and(j<(a+b)*Max) :
                plt.scatter(i, j, color = 'green')
            else :
                plt.scatter(i, j, color = 'red')

    plt.xlabel("Alpha")
    plt.ylabel("Beta")
    plt.legend()



    plt.xlim(0,25)
    plt.ylim(0,25)
    plt.savefig("Graph_Degre2.png", dpi=400)
    plt.show()



limite(0,2,1,6)
```
Figure 11: Programme donnant le graphique (de α selon β) montrant les coefficients respectant les inégalités